BAB 2

PENGANTAR TEORI PELUANG

Pada bab ini dibahas teori dasar peluang dengan beberapa sifat-sifatnya, terutama yang mendasari konsep- konsep statistika berikutnya, serta aplikasinya dalam persoalan riil.

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul

Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

Tujuan Umum

Setelah mempelajari materi pada bab ini mahasiswa diharapkan memahami prinsip dasar dan sifat- sifat peluang yang menjadi dasar statistika serta menggunakannya dalam menyelesaikan persoalan riil.

Tujuan Khusus

Setelah mempelajari materi pada bab ini, secara khusus mahasiswa diharapkan dapat:

1. menyebutkan komponen dasar peluang;
2. menyebutkan syarat dan contoh percobaan Bernoulli
3. menghitung ruang sampel dan peluang dari eksperimen dengan ruang sampel berhingga;
4. menyebutkan aksioma dan sifat-sifat peluang;
5. menggunakan sifat-sifat peluang dalam menyelesaikan soal-soal peluang;

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
56 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

6. menyebutkan prinsip peluang bersyarat;

7. menyebutkan syarat peluang saling bebas;

8. menggunakan teorema Bayes dalam menghitung peluang bersyarat.

Materi

1. Prinsip Dasar Peluang

2. Percobaan Bernoulli

3. Menghitung Ruang sampel dan Peluang

4. Aksioma dan Sifat- sifat Peluang

5. Peluang Bersyarat dan Peristiwa Saling Bebas

6. Teorema Bayes

2.1. Prinsip Dasar Peluang

Peluang dan statistika sangat erat sekali kaitannya. Peluang merupakan alat yang memungkinkan ahli statistika menggunakan informasi yang ada pada sampel untuk membuat keputusan atau uraian tentang populasi dari mana sampel itu berasal.

Peluang menggambarkan tingkat keyakinan seseorang terhadap sesuatu yang akan terjadi. Namun keyakinan yang dimaksud didalam peluang, bukanlah keyakinan berupa penilaian (*judgement*), misalnya keyakinan tentang "benar/salah" nya ucapan seseorang, tetapi lebih kepada keyakinan tentang kemungkinan terjadinya suatu hasil dari suatu percobaan yang bersifat konseptual. Misalnya, kemungkinan terjadinya kecelakaan dari sejumlah perjalanan; kemungkinan munculnya salah satu muka dalam lemparan (*tossing*) uang logam atau dadu.

Secara historis ide peluang berawal dari kalangan 'penjudi' (*'gambler'*) yaitu ketika Chevalier de Mere mengajukan pertanyaan kepada Pascal. Studi secara matematis dipelopori oleh Laplace (1812), Pearson (1857-1936), Mishes (1931), R.A. Fisher (1890-1962) dan Kolmogorov (1933).

Ada tiga komponen penting dari peluang yaitu: *eksperimen/ percobaan, ruang sampel dan peristiwa* (*event*). Definisi dari istilah- istilah tersebut diberikan berikut ini.

Definisi 2.1. *Eksperimen $\mathcal{E}$ adalah percobaan/ kegiatan darimana suatu gejala atau pengukuran di amati.*

Contoh 2.1. Beberapa contoh eksperimen adalah:

1. melempar uang logam 1 kali atau 2 kali;
2. melempar dadu 1 kali atau 2 kali;
3. menyusun bilangan puluhan dari angka $\{0, 1, 2, 3\}$;
4. mengamati lamanya sambungan tilpun dalam detik dalam 1 hari.
5. mengamati banyaknya hubungan tilpun dalam 1 hari pada satu nomor.

6. mengamati banyaknya lemparan uang logam yang diperlukan sampau muncul angka.

Suatu eksperimen biasanya menghasilkan lebih dari satu hasil (misalnya lulus tidak lulus, muncul angka atau gambar, muncul angka genap, muncul angka 1,2, dan seterusnya). Hasil yang tidak bisa diuraikan menjadi hasil yang lebih kecil disebut titik sampel.

Definisi 2.2. *Titik sampel adalah hasil yang tidak dapat didekomposisi menjadi hasil yang lebih kecil. Titik sampel biasanya dinotasikan dengan* E_i, $i = 1, 2, 3, \cdots$,

---

Contoh 2.2. Beberapa contoh titik sampel dari suatu eksperimen adalah:

1. pada eksperimen melempar uang logam 2 kali, titik sampelnya adalah AA, AG, GA, GG;

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
60 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

2. pada eksperimen melempar dadu 1 kali, titik-titik sampelnya adalah: $1, 2, 3, 4, 5, 6$;

3. pada eksperimen menyusun bilangan puluhan dari angka $\{0, 1, 2, 3\}$, titik-titik sampelnya adalah bilangan-bilangan $10, 11, \cdots, 33$;

Misalkan $E_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots$ adalah titik-titik sampel yang tidak terdekomposisi dari eksperimen $\mathcal{E}$, maka

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = 1$$

Definisi 2.3. *Ruang sampel adalah himpunan semua titik sampel yaitu semua hasil yang mungkin terjadi. Ruang sampel biasanya dinotasikan dengan S.*

Contoh 2.3. Eksperimen-eksperimen pada Contoh 2.1 dapat ditentukan Ruang Sampelnya sepeti berikut ini.

1. Untuk pelemparan uang logam satu kali $S = \{A, G\}$ sedangkan untuk melempar uang logam dua kali $S = \{AA, AG, GA, GG\}$.
2. Untuk melempar satu dadu ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se-dangkan untuk melempar dua dadu ruang sampelnya adalah $S = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 6), \cdots (5, 6), (6, 6)\}$.
3. Ruang sampel bilangan puluhan yang bisa dibuat dari angka- angka yang ada (tak berulang) adalah $S = \{10, 12, 13, 20, 21, 23, 31, 32\}$.
4. Ruang sampel lama waktu sambungan tilpun (misalnya dalam satuan detik) adalah $S = \{x|0 < x < \infty\}$.
5. Ruang sampel banyaknya hubungan tilpun adalah $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$.
6. Ruang sampel banyaknya lemparan yang diperlukan adalah $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Ruang sampel dibedakan menjadi dua macam. Yang pertama disebut ruang sampel *diskrit,* jika terdiri atas titik- titik sampel berhingga atau takberhingga secara terhitung (*countably infinite*), yaitu apabila dapat dibuat korespondensi

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
62 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

satu- satu dengan antara ruang sampel itu dengan sebagian atau seluruh himpunan bilangan asli. Jenis kedua adalah ruang sampel *kontinu,* apabila memuat titik- titik sampel yang tak ternomorkan (*nondenumarable*), yaitu tidak bisa dikorespondensikan satu-satu dengan sebagian atau seluruh bilangan asli. Pada Contoh 2.1, eksperimen lamanya sambungan tilpun merupakan eksperimen dengan ruang sampel kontinu, sedangkan sisanya merupakan eksperimen dengan ruang sampel diskrit.

Definisi 2.4. *Peristiwa adalah sebagian dari ruang sampel yang manjadi pusat perhatian kita. Peristiwa merupakan subset dari ruang sampel dan dinotasikan dengan huruf besar misalnya* A, B.

Secara khusus S disebut juga peristiwa yang pasti, sementara $\emptyset$ disebut peristiwa yang mustahil. Pada dasarnya ruang sampel S adalah himpunan semesta dari suatu kejadian dengan unsur- unsurnya adalah titik sampel. Sedangkan peristiwa adalah himpunan bagian dari himpunan semesta. Karenanya ketiganya

dapat divisualisasikan melalui diagran Venn seperti pada Gambar 2.1.

Peristiwa yang dapat diamati dari suatu eksperimen tidaklah tunggal. Misalnya pada pelemparan dua dadu beberapa peristiwa yang dapat diamati diantaranya.

- Mata pertama prima. Bilangan prima antara 1 dan 6 adalah 2, 3 dan 5 yang merupakan unsur pertama dari pasangan terurut (x, y), sedangkan unsur keduanya bebas yaitu mata 1 sampai 6. Karenanya peristiwanya adalah $A = \{(x, y)|x = 2, 3, 5; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Jumlah mata merupakan bilangan kuadrat. Jumlah mata pada pelemparan dua dadu membentuk bilangan $2, 3, \cdots, 12$ sedangkan yang merupakan bilangan kuadrat adalah 4 dan 9 yang dibentuk dari beberapa kombinasi mata. Peristiwa yang dimaksud dapat dinyatakan dengan himpunan

$$B = \{(2, 2), (3, 1), (1, 3), (5, 4), (4, 5), (3, 6), (6, 3)\}.$$

Contoh 2.4. Pada eksperimen/ percobaan *tossing* (melempar) satu uang logam, dengan muka angka(A) dan Gambar (G), sebanyak dua kali maka:

Gambar 2.1: Diagram Venn mengilustrasikan Ruang Sampel $S = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, peristiwa A dan B.

- ruang sampelnya adalah $S = \{AA, AG, GA, GG\}$;
- beberapa peristiwa yang bisa diamati diantaranya adalah munculnya dua gambar atau munculnya satu gambar.

Contoh 2.5. Pada eksperimen/ percobaan *tossing* (melempar) satu dadu bermata enam, sebanyak satu kali maka:

- ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- beberapa peristiwa yang bisa diamati diantaranya adalah munculnya mata genap, $A = \{2, 4, 6\}$; munculnya mata ganjil, $B = \{1, 3, 5\}$ atau munculnya mata prima, $P = \{2, 3, 5\}$.

Dilihat dari kemunculannya dua peristiwa bisa saling bebas atau saling lepas yang definisinya diberikan berikut ini.

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
65 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

Definisi 2.5. *Peristiwa A dan B dikataan saling bebas (mutually independent), apabila terjadinya peristiwa A tidak mempengaruhi terjadinya peristiwa B dan sebaliknya.*

Contoh 2.6. Beberapa contoh peristiwa-peristiwa yang saling bebas adalah:

i munculnya mata dadu pada dadu pertama dan mata dadu pada dadu kedua jika dua dadu dilempar sekaligus;

ii munculnya A pada pelemparan pertama dan G pada pelemparan kedua bila uang logam dilempar dua kali.

Contoh 2.7. Contoh peristiwa yang tidak saling bebas adalah pengambilan bola dari seember bola. Jika dalam satu ember ada 3 bola merah dan 7 bola putih dan dilakukan pengambilan dua kali tanpa pengembalian, maka peristiwa terambil bola pertama merah dan terambil bola kedua putih adalah peristiwa yang tidak saling bebas

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
66 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

Definisi 2.6. *Peristiwa A dan B dikatakan saling lepas (***mutually exclussive** *), apabila peristiwa A tidak mungkin terjadi bersama sama dengan peristiwa B.*

Contoh 2.8. Pada pelemparan dadu sekali, peristiwa munculnya mata genap dengan peristiwa munculnya mata ganjil adalah peristiwa yang saling lepas, yaitu $A = \{2, 4, 6\}$ dann $B = \{1, 3, 5\}$.

Dilihat dari konsep himpunan, dua peristiwa tidak akan terjadi bersama-sama jika himpunan peristiwa tersebut merupakan himpunan yang saling asing, sehingga $A \cap B = \emptyset$. Dengan demikian syarat dua peristiwa saling lepas dapat dirumuskan dengan cara yang sedikit lain, seperti dinyatakan pada teorama berikut ini.

Dua peristiwa A dan B saling lepas jika dan hanya jika $A \bigcap B = \emptyset$.

2.2. Percobaan Bernoulli

Dalam teori peluang ada jenis percobaan atau eksperimen yang disebut percobaan Bernpulli, yang sangat penting peranannya dalam perkembangan teori peluang dan statistika. Percobaan Bernoulli adalah percobaan yang memiliki sifat- sifat berikut:

1. mempunyai Ruang sampel diskrit yang dapat dikelompokkan atas dua jenis yaitu sukses (s) dan gagal (g), dengan kata lain, $S = \{s, g\}$;
2. pengamatan dapat dilakukan berulang-ulang;
3. peluang sukses dan gagal tidak mesti sama, tetapi
4. peluang sukses dari satu pegamatan ke pengamatan lainnya selalu konstan atau sama;

Dengan demikian pada percobaan Bernoulli, jika peluang sukses, $P(s) = p$, maka peluang gagal, $P(g) = 1 - p$.

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
68 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

Contoh 2.9. Eksperimen melempar uang logam berulang- ulang dengan hasil A dan G, merupakan eksperimen Bernoulli karena:

1. pengamatan dapat dilakukan berulang-ulang;
2. kejadian A dapat dianggap kelompok sukses dan G dapat dianggap sebagai kelompok gagal.
3. peluang munculnya A dari suatu pengamatan ke pengamatan berikutnya konstan yaitu $P(A) = 1/2$.

Contoh 2.10. Eksperimen melempar mata dadu berulang- ulang merupakan eksperimen bernouli karena:

1. pengamatan dapat dilakukan berulang- ulang;
2. peristiwa $A \subseteq S$ dapat dikelompokkan sebagai kejadian sukses dan peristiwa A^c dapat dikelompokkan sebagai kejadian gagal;
3. peluang munculnya A konstan dari suatu pengamatan ke pengamatan yaitu $P(A) = \sum P(x),\ x \in A$. Misalnya jika A adalah mata kuadrat, maka

$A = \{1, 4\}$ dan $P(A) = 2/6 = 1/3$.

Contoh 2.11. Suatu tes pilihan ganda dapat dianggap sebagai percobaan Bernoulli, jika memenuhi syarat berikut:

(i) banyaknya pilihan dari tiap-tiap soal tetap, misalnya 5 pilihan dan hanya sau diantaranya benar;

(ii) soal dikerjakan dengan menebak sehingga peluang memperoleh jawaban benar tetap konstan, misalnya $1/5$.

Pada percobaan Bernoulli, ada beberapa pengamatan yang bisa dilakukan yang menghasilkan peubah acak yang berbeda-beda. Beberapa pengamatan penting adalah:

1. banyaknya sukses, yang terjadi ketika percobaan Bernoulli itu diulang secara saling bebas sebanyak n kali;

2. banyaknya percobaan yang dilakukan sampai keluar 1 sukses;

3. banyaknya percobaan yang yang dilakukan sampai terjadi r sukses.

Misalnya pada pelemparan uang logam pengamatan bervariasi diantaranya mengamati banyaknya angka yang muncul pada n pelemparan atau jumlah lemparan yang diperlukan sampai muncul 1 angka, atau r angka. Pengamatan yang berbeda akan menghasilkan peubah acak dengan distribusi berbeda seperti diuraikan pada pembahasan berikutnya.

2.3. Menghitung Ruang sampel dan Peluang

Untuk kasus diskrit dengan ruang sampel berhingga, sering ruang sampelnya bisa dihitung. Untuk menghitung peluang suatu peristiwa diperlukan pengetahuan tentang banyaknya unsur dari ruang sampel dan unsur dari peristiwa yang menjadi perhatian. Untuk menghitung ruang sampel diperlukan pengetahuan dasar tentang kombinatorik.

Definisi 2.7 (Peluang peristiwa berhingga). *Pada eksperimen dengan ruang sampel diskrit berhingga, jika peristiwa A terdiri atas $\#(A)$ titik sampel dan ruang sampel S terdiri atas $\#(S)$ titik sampel, yang masing- masing mempunyai peluang yang sama, maka penghitungan peluangnya adalah*

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} \tag{2.1}$$

Aturan 2.1 (Langkah-langkah menghitung peluang). *Langkah untuk menghitung nilai peluang suatu peristiwa $A \subset S$ dari suatu eksperimen $\mathcal{E}$.*

(i) Definisikan dengan jelas eksperimen $\mathcal{E}$.

(ii) Definisikan S dengan mendaftar seluruh titik-titik sampelnya, E_i, sampai pada titik yang tidak dapat didekomposisi. Yakinkan bahwa seluruh E_i membentuk partisi dari S. Untuk menghitng R yang berhingga dapat diterapkan prinsip perkalian atau penjumlahan.

(iii) Hitung peluang masing-masing E_i, yakinkan bahwa $0 \leq p(E_i) \leq 1$ dan $\sum P(E_i) = 1$.

(iv) Definisikan unsur-unsur himpunan A. Yakinkan bahwa semua titik sampel diperiksa apakah $E_i \in A$ atau $e_i \notin A$.

(v) Tentukan $P(A) = \sum P(E_i); E_i \in A$.

Contoh 2.12. Dua dadu dilempar, secara saling bebas. Tentukan peluang munculnya mata dadu pertama prima dan mata dadu kedua kuadrat sempurna

<u>Jawab:</u>

Secara lengkap, langkah-langkah yang ditempuh adalah:

(i) $\mathcal{E}$ adalah dua dadu dilempar secara saling bebas.

(ii) $S = \{(x, y)|x = 1, 2, \cdots, 6; y = 1, 2, \cdots, 6\}$.

(iii) Seluruh titik sampel ada 36 yang masing- masing berpeluang sama. Jadi peluang masing-masing titik sampel (E_i) adalah 1/36.

(iv) $A = \{(x, y)|x = 2, 3; y = 1, 4\}$. Secara umum $\#(A)$ ada $2\times2\times6 = 24$ Namun ada 4 titik sampel yang dihitung dua kali yaitu $(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)$. Jadi $\#A = 24 - 4 = 20$.

		y					
	(x,y)	**1**	2	3	**4**	5	6
	1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	**(1,4)**	(1,5)	(1,6)
	2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**
x	**3**	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**
	4	**(4,1)**	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
	5	**(5,1)**	(5,2)	(5,3)	**(5,4)**	(5,5)	(5,6)
	6	**(6,1)**	(6,2)	(6,3)	**(6,4)**	(6,5)	(6,6)

(v) Jadi $P(A) = \dfrac{\#(A)}{\#(S)} = 20/36 = 5/9.$

Contoh 2.13. Dari angka $0, 1, 2, 3, 4$ dan 5 disusun untuk membentuk bilangan ratusan (tidak berulang). Tentukan peluang bahwa angka yang terjadi merupakan kelipatan 5

Jawab:

(i) Eksperimen yang ada adalah menyusun angka agar membentuk bilangan ratusan.

FMIPA-UNEJ

Daftar Isi

Judul

Cari Halaman

Kembali

Layar Penuh

Tutup

Keluar

(ii) Untuk menghitung titik-titik sampel perlu diperhatikan bahwa untuk menghasilkan angka ratusan perlu diperhatikan

- banyaknya angka ada 3;
- angka pertama tidak boleh 0 (ada 4 angka yang bisa sebagai angka pertama);
- karena problemnya menyusun angka, berarti bilangan yang dihasilkan tidak boleh menggunakan anga yang sama (tidak boleh berulang). Angka yang sudah dipakai sebelumnya tidak boleh dipakai lagi.

Oleh karena itu banyaknya seluruh titik sampel adalah

I	II	III	total
5	5	3	75

(iii) Supaya bilangan ratusan yang terjadi merupakan kelipatan 5, maka angka terakhir haruslah 0 atau 5. Angka I tidak boleh 0. Jika 0 pada angka III, maka 5 boleh pada angka I (tetap 5 pilihan). jika 5 pada angka III, maka

0 dan 5 tidak boleh pada angka I (tinggal 4 pilihan). Untuk angka 0 dan angka 5 sebagai angka III masing- masing menghasilkan

I	II	III	total
5	4	1	20

dan

I	II	III	total
4	4	1	16

Jadi total keseluruhan ada 20+16=36 bilangan.

(iv) Jadi $P(A) = 36/75 = 12/25$.

2.4. Aksioma dan Sifat-sifat Peluang

Peluang dari ruang sampel dan peristiwa-peristiwa dalam ruang sampel tesebut memiliki beberapa sifat mendasar yang harus dipenuhi yang dituangkan dalam aksioma berikut ini.

Definisi 2.8. *Misalkan S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen ϵ. Secara aksiomatik peluang dari suatu kejadian $A \subset S$, dinotasikan dengan $P(A)$, yang merupakan peluang hasil suatu eksperimen yang merupakan unsur dari A, memenuhi aksioma berikut:*

Aksioma 1 $P(A) \geq 0$ *untuk setiap peristiwa* $A \subseteq S$.

Aksioma 2 *Jika* $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *merupakan peristiwa- peristiwa yang saling lepas dari ruang sampel* S *(yaitu* $A_i \cap A_j = \emptyset$*, untuk* $i \neq j$*) , maka* $P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P(A_i)$

Aksioma 3 $P(S) = 1$.

Secara operasional, apabila pada ruang sampel, titik- titik sampelnya mempunyai kecenderungan yang sama untuk terjadi (*equally likely outcome*), maka peluang suatu peristiwa yang terdiri atas beberapa titik sampel dihitung berdasarkan perbandingan antara titik-titik sampel yang menjadi unsur dari suatu peristiwa dengan jumlah seluruh titik sampel. Cara penghitungan seperti ini disebut *metode titik sampel*.

Beberapa konsekuensi logis yang merupakan hasil penting dalam teori peluang dinyatakan pada teorema-teorema berikut.

Untuk setiap $A \subset S$, $P(A) = 1 - P(A^c)$.

<u>Bukti:</u>

Kita memiliki $S = A \cup A^c$ dan $A \cap A^c = \emptyset$. Maka

$$
\begin{aligned}
P(S) &= P(A) + P(A^c) \\
1 &= P(A) + P(A^c) \\
\text{Jadi} \quad P(A) &= 1 - P(A^c) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Peluang dari himpunan kosong adalah nol, $P(\emptyset) = 0$.

Bukti:

Dengan mengambil $A = \emptyset$, pada Teorema 2.4, kita memperoleh $A^c = \emptyset^c = S$. Maka

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(A^c) \\
P(\emptyset) &= 1 - P(S) = 1 - 1 = 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dengan mengambil $A_i = A$ dan $A_j = B$ pada aksioma 2, maka kita peroleh hasil sebagaimana teorema-teorema berikut ini.

Jika $A \cap B = \emptyset$, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teorema di atas hanya merupakan bentuk khusus dari Aksioma 2, dengan mengambil hanya dua peristiwa, yaitu $A_1 = A$ dan $A_2 = B$.

Jika $B \subset A$, maka $P(B) \leq P(A)$

Bukti:

Jika $A \subset B$, maka kita dapat mencari himpunan $C = A \cap B^c$ sehingga $C \cup B = A$ dan $C \cap B = \emptyset$ (lihat Gambar 2.2). Dengan demikian

$$P(A) = P(B) + P(A \cap B^c)$$
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(B) \geq 0$$

Jadi

$$P(A) \geq P(B)$$

Secara umum $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>Bukti:</u>

Secara umum $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ dimana $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$, lihat Gambar 2.3. Dengan demikian

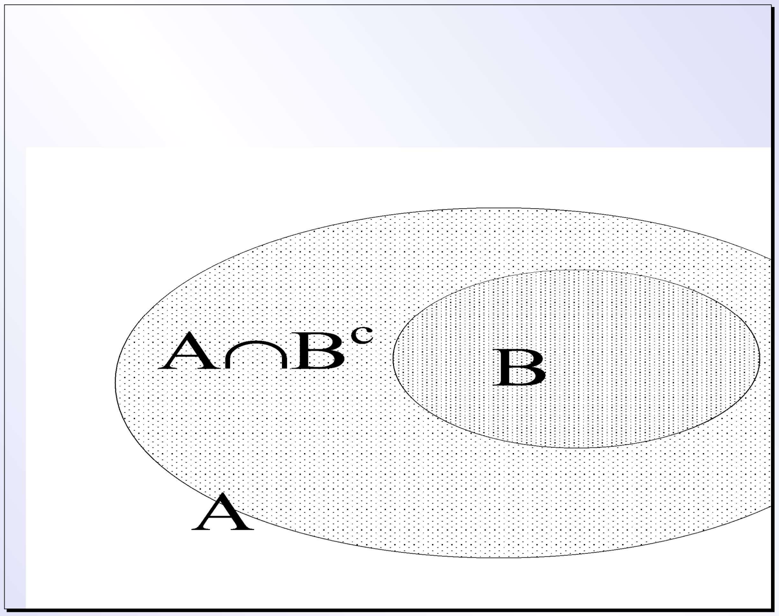
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c). \tag{2.2}$$

Sementara itu $B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$ dengan $(A \cap B) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$, maka

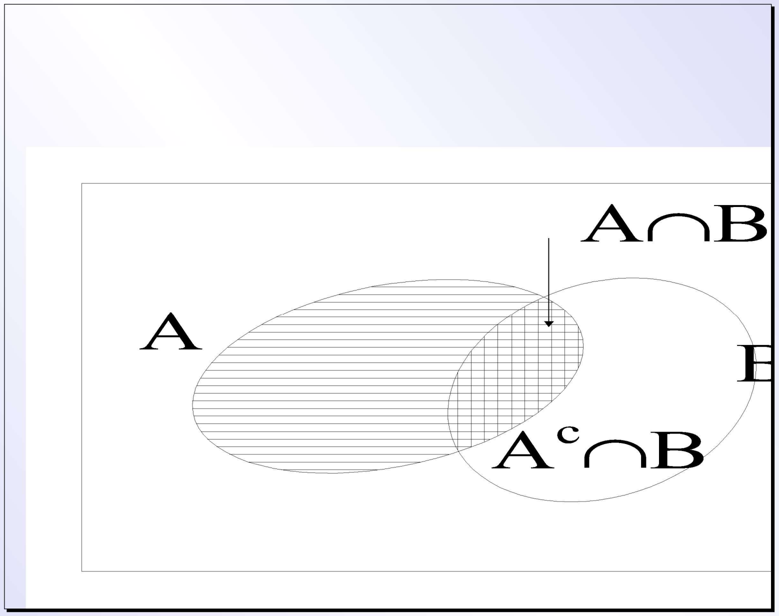
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(B \cap A^c) \text{ dan} \\ P(B \cap A^c) &= P(B) - P(A \cap B). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) menyebabkan persamaan (2.2) manjadi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \square$$



Gambar 2.2: Diagram Venn mengilustrasikan jika $A \subset B$ maka $A = B \cup (A \cap B^c)$.



Gambar 2.3: Diagram Venn mengilustrasikan bahwa secara umum $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ dan $B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$.

2.5. Peluang Bersyarat dan Peristiwa Saling Bebas

Dalam banyak situasi, kita ingin mengetahui peluang terjadinya suatu peristiwa manakala peristiwa lain telah terjadi. Demikian juga, misalnya jika suatu peristiwa bisa terjadi melalui banyak cara, setelah suatu peristiwa terjadi, mungkin kita ingin mengetahui peluang cara mana yang menyebabkan terjadinya peristiwa tersebut.

2.5.1. Peluang Bersyarat

Definisi 2.9. *Peluang bersyarat A terhadap B, $P(A|B)$ adalah peluang terjadinya A apabila telah terjadi B.*

Untuk memahami ide peluang bersyarat, misalkan suatu eksperimen diulang banyak kali sehingga menghasilkan beberapa jenis peristiwa misalnya:

i peristiwa $A \cap B$ dengan banyaknya titik sampel n_{ab};

ii peristiwa $A \cap B^c$ dengan banyaknya titik sampel $n_{ab'}$;

iii peristiwa $A^c \cap B$ dengan banyaknya titik sampel $n_{a'b}$;

iv peristiwa $A^c \cap B^c$ dengan banyaknya titik sampel $n_{a'b'}$,

seperti ditunjukkan pada tabel berikut

$\cap$	A	A^c	Total
B	n_{ab}	$n_{a'b}$	$n_B = n_{ab} + n_{a'b}$
B^c	$n_{ab'}$	$n_{a'b'}$	$n_B^c = n_{ab'} + n_{a'b'}$
Total	$n_A = n_{ab} + n_{ab'}$	$n_A^c = n_{a'b} + n_{a'b}$	N

Dari titik-titik sampel di atas kita peroleh peluang sebagai berikut:

i $P(A) = n_A/N = (n_{ab} + n_{ab'})/N$;

ii $P(B) = n_B/N = (n_{ab} + n_{a'b})/N$;

iii $P(A \cap B) = n_{ab}/N$.

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
87 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

Selanjutnya jika terjadi B, maka peluang terjadinya A sama dengan bisa kita periksa

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{n_{ab}}{n_{ab} + n_{a\not b}} \\
&= \frac{\frac{n_{ab}}{N}}{\frac{n_{ab} + n_{a\not b}}{N}} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}
\end{aligned}
$$

Peluang bersyarat $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, dan $P(B) \neq 0$

Akibat 2.1 (Prinsip Perkalian). *Konsekuensi logis dari Teorema 2.5.1 adalah bahwa secara umum berlaku*

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \tag{2.4}$$

2.5.2. Dua Peristiwa Saling Bebas

Dua peristiwa dikatakan saling bebas apabila terjadinya peristiwa yang satu tidak dipengaruhi oleh peristiwa yang lain. Dengan kata lain, peluang terjadinya peristiwa yang satu, tidak dipengaruhi peluang terjadinya peristiwa yang lain.

Definisi 2.10. *Jika A dan B saling bebas, maka pristiwa A tidak bergantung pada B, dengan kata lain $P(A|B) = P(A)$*

Dari definisi di atas dan definisi tentang peristiwa bersyarat sebelumnya dapat diturunkan besarnya peluang $A \cap B$, jika A dan B saling bebas. Lebih lanjut, jika suatu peristiwa saling bebas, dengan peristiwa lain, maka peristiwa tersebut juga saling bebas dengan komplemennya peristiwa yang lain.

Peristiwa A dan B dikatakan saling bebas, jika dan hanya jika $P(A \cap B) = P(AB) = P(A)P(B)$.

Jika peristiwa A dan B saling bebas, maka peristiwa A dan B^c juga saling bebas.

Bukti:

A dan B saling bebas, maka $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Disamping itu $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ dimana $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$. Jadi kedua irisan ini saling lepas dan $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$. Selanjutnya dari sini diperoleh:

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Jadi A dan B^c saling bebas.

Contoh 2.14. A melempar 6 dadu dan dikatakan menang jika ada muncul angka 1. B melempar 12 dadu dan dikatakan menang jika muncul setidaknya

2 angka 1. Tentukan siapa diantara A dan B yang peluangnya menang lebih tinggi.

<u>Jawab:</u>

(i) Misalkan peluang A menang adalah $P(A)$, namun dalam masalah ini lebih mudah menghitung peluang A kalah yaitu $P(A^c)$. A kalah jika sama sekali tidak muncul angka 1 yaitu $P(x = 0)$. Dari 6 dadu yang saling bebas, masing- masing memiliki peluang tidak muncul angka 1 adalah $5/6$ untuk tiap dadu. Jadi $P(A^c) = (5/6)^6$. Dengan demikian $P(A) = 1 - (5/6)^6$.

(ii) Demikian juga akan lebih mudah mengitung peluang B kalah. Keadaan pertama B kalah adalah jika sama sekali tidak muncul angka 1, dari 12 dadu, berarti peluangnya $(5/6)^{12}$.

(iii) Keadaan kedua B kalah apabila hanya muncul satu angka 1 diantara 12 dadu. Artinya 1 dadu muncul angka 1 dengan peluang 1/6 dan 11 dadu tidak muncul angka 1 dengan peluang $(5/6)^{1}1$. Dan angka 1 yang muncul

bisa berasal dari salah satu dari 12 dadu. Jadi peluang untuk kejadian ini adalah dengan peluang $12 \times (5/6)^{11} \times (1/6)$.

(iv) Oleh karena itu $P(B^c) = (5/6)^12 + 12 \times (5/6)^11 \times (1/6)$.

(v) Peluang B menang adalah $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - [(5/6)^12 + 12 \times (5/6)^{11} \times (1/6)]$

(vi) Dari nilai $P(A)$ dan $P(B)$ dapat ditentukan siapa yang memiliki peluang menang lebih besar.

2.5.3. Tiga atau lebih Peristiwa Saling Bebas

Definisi tentang kesalingbebasan untuk dua peristiwa, dapat diperluas untuk tiga atau lebih peristiwa. Secara formal definisi kesalingbebasan untuk tiga peristiwa atau lebih diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2.11. *Tiga atau lebih peristiwa* $A_1, A_2, \cdots, A_m$ *dikatakan saling bebas*

jika memenuhi

$$\left.\begin{array}{lrcl} (i) & P(A_i \cap A_j) & = & P(A_i)P(A_j) \textit{ untuk } \forall i \neq j \\ (ii) & P(A_i \cap A_j \cap A_k) & = & P(A_i)P(A_j)P(A_k) \textit{ untuk } \forall i \neq j \neq k \\ & & \vdots & \\ (iii) & P\left(\cap_{i=1}^{m} A_i\right) & = & \prod_{i=1}^{m} P(A_i) \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Jika $A_i,\ i = 1, 2, \cdots, m$ hanya memenuhi $P\left(\cap_{i=1}^{m} A_i\right) = \prod_{i=1}^{m} P(A_i)$ tetapi ada i, j sehingga $P(A_i \cap A_j) \neq P(A_i)P(A_j)$ dikatakan *bebas secara keseluruhan*, dan jika memenuhi $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$untuk $\forall i \neq j$ dikatakan *saling bebas secara berpasangan* (*pairwise independent*).

Contoh 2.15. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ p_j$ adalah peluang titik sampel j, dengan $p_1 = 1/8, p_2 = 3/16 = p_3 = p_4,\ p_5 = 5/16.$ Misalkan pula $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 4\},\ C = \{1, 3, 4\}.$ Maka $P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = 8/16,\ P(B) = P(C) = 1/2.$ Selanjutnya $A \cap B \cap C = \{1\}$ jadi $P(A \cap B \cap C) = 1/8 = P(A)P(B)P(C).$ Tetapi $A \cap B = \{1, 2\}$, sehingga

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul
◀◀ ◀ ▶ ▶▶
93 dari 481
Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

$P(A \cap B) = 5/16 \neq P(A)P(B)$ dan A, B, C tidak saling bebas secara berpasangan.

2.6. Teorema Bayes

Salah satu hasil yang sangat terkenal sehubungan dengan peristiwa bersyarat adalah yang disebut dengan Teorema Bayes. Sekarang ini Teorama Bayes telah berkembang cukup luas dan analisis statistika yang didasari oleh teorema ini disebut *Statistika Bayesian.* Teorema Bayes berlaku untuk peristiwa-peristiwa yang membentuk partisi sutu ruang sampel.

Definisi 2.12. *Himpunan B_i, $i = 1, 2, \cdots B_m$ dikatakan partisi dari ruang sampel S, jika:*

$$\left.\begin{array}{ll} B_i \cap B_j = \emptyset & \textit{untuk semua } i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{m} B_i = S & \\ P(B_i) > 0 & \textit{untuk } \forall i. \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Misalkan B_i, $i = 1, 2, \cdots B_m$ adalah partisi dari ruang sampel S dan A

adalah suatu peristiwa bagian dari S. Maka

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i). \tag{2.7}$$

Bukti:

Karena $A = \bigcup_{i=1}^{m}(A \cap B_i)$ dimana masing-masing $(A \cap B_i)$ adalah saling lepas secara berpasangan, maka $P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m}(A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i)$ dan dengan menggunakan peluang bersyarat diperoleh $P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)$.

Teorema di atas menghasilkan suatu teorema yang sangat penting dalam bidang statistika sebagaimana dirumuskan berikut ini.

[Teorema Bayes] Misalkan $B_i,\ i = 1, 2, \cdots, m$ adalah partisi dari ruang sampel S dan A adalah suatu peristiwa pada S, maka

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(B_i)P(A|B_i)},\ i = 1, 2, 3, \cdots, m \tag{2.8}$$

Bukti:

FMIPA-UNEJ
Daftar Isi
Judul

Cari Halaman
Kembali
Layar Penuh
Tutup
Keluar

Secara umum untuk semua i berlaku

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$$

Pembagian dengan $P(A)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}, \text{ atau} \\ P(B_i|A) &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i)}, \\ &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)P(B_i)}. \end{aligned}$$

Teorema Bayes kadang- kadang disebut *peluang invers* atau *peluang hipotesis*. Peristiwa-peristiwa B_i membentuk m hipotesis prior yang digunakan untuk mempertimbangkan peristiwa A. $P(B_i)$ disebut *peluang prior*. Sedangkan $P(B_i|A)$ disebut *peluang posterior* untuk hipotesis yang sama. Peluang posterior ini adalah peluang terjadinya peristiwa B_i, setelah atau ketika peristiwa A terjadi.

Contoh 2.16. Misalkan masyarakat dikelompokkan atas perokok berat (B), perokok ringan (R) dan perokok pasif (F) yang masing- masing mempunyai peluang

terkena kanker paru-paru sebesar 10%, 2%, dan 0,5% berturut-turut. Misalkan prosentase masyarakat perokok berat, ringan dan pasif adalah 10%, 20% dan 70%. Tentukan

i peluang seseorang terkena kanker, jika seseorang diambil secara acak?

ii berapa peluang bahwa seseorang sebagai perokok pasif, jika diketahui dia terkena kanker?

Jawab:

Kita memiliki $P(B) = 0,1$; $P(R) = 0,2$; $P(F) = 0,7$, demikian juga

$P(K|B) = 0,1;\ P(K|R) = 0,02$ dan $P(K|F) = 0,005.$ Maka

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K|B)P(B) + P(K|R)P(R) + P(K|F)P(F) \\ &= 0,1 \times 0,1 + 0,02 \times 0,2 + 0,005 \times 0,7 \\ &= 0,01 + 0,004 + 0,0035 \\ &= 0,0175 \\ P(F|K) &= \frac{P(F)P(P(K|F)}{P(K)} \\ &= \frac{0,7 \times 0,005}{0,0175} \\ &= 0,2. \end{aligned}$$

Verifikasi terhadap hasil di atas dapat dilakukan dengan mengambil eksperimen fiktif misalkan terdiri atas 2000 titik sampel (orang). Maka secara teoritis, sesuai peluang masing-masing, distribusi titik sampelnya adalah sebagai berikut.

Perokok	Kanker (K)	Tidak	Total	$P(.)$	
Berat (B)	20	180	200	20/200=0,1	$P(K\|B)$
Ringan (R)	8	392	400	8/400= 0,02	$P(K\|R)$
Pasif (F)	7	1393	1400	$7/1400 = 0{,}005$	$P(K\|F)$
	35	1965	2000	1	

Dengan demikian secara teoritis, yang terkena kanker adalah 35 dari 2000, yaitu 0,0175 dan dari 35 orang itu, 7 diantaranya dari perokok pasif. Karenanya peluang bahwa orang yang terkena kanker itu adalah perokok pasif adalah 7/35 = 0,2.

2.7. Bahan Bacaan

Untuk lebih memahami dasar-dasar teori peluang disarankan membaca Hogg & Craig [10, Bab I]. Untuk pendekatan yang lebih matematis dapat dibaca Feller[6]. Sedangkan pendekatan aplikatif dapat dibaca pada Wackerley *et al.* [22] dan Meyer [14]. Bagi yang ingin mendalami Statistika Bayesian dapat memulai dengan membaca Gelman *et al.*[9] dan Beranardo & Smith[4].

2.8. Soal-soal Latihan

1. Misalkan A, B, C adalah sembarang peristiwa subset dari S. Notasikan pernyataan-pernyataan berikut:

   (a) Setidaknya salah satu terjadi.

   (b) Tepat ada dua peristiwa terjadi.

   (c) Ketiga peristiwa terjadi.

   (d) Hanya B yang terjadi.

   (e) Tak satupun terjadi.

   (f) Tepat satu peristiwa terjadi.

2. Buktikan bahwa

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

3. Satu set kartu terdiri atas 52 lembar kartu, terbagi atas 4 kelompok warna masing-masing sebanyak 13 lembar kartu, yaitu berwarna merah(m), kuning(k), hijau(h) dan biru(b). Seseorang memegang 10 lembar kartu berapa

peluang bahwa terdiri atas 2 lembar berwarna merah, 3 lembar berwarna kuning, 3 lembar berwarna hijau dan 2 lember berwarna biru.

4. Dalam suatu seleksi pegawai baru pada suatu instansi, ada 5 peserta yang kemampuannya saling berbeda. Jika pemilihan dilakukan secara acak, tentukan peluang

   (a) terpilih peserta terbaik dan 3 peserta terjelek;

   (b) terpilih terbaik kedua dan salah satu dari tiga peserta terjelek.

5. Misalkan pasien akan sembuh terhadap suatu pengomatan dengan peluang 0.9. Jika 3 pasien diobati tentukan peluang paling tidak satu pasin akan sembuh.